# Возможные решения задач

8 класс

## Задача 1. Шары или сферы

Сначала, определим во сколько раз отличаются диаметры шаров. Шар однозначно определяется сво- им диаметром, а значит любые его геометрические параметры тоже выражаются исключительно через диаметр. Исходя из соображений размерности,

𝑉шара = 𝛼 ⋅ 𝑑3, (1)

где 𝛼 — некоторый безразмерный коэффициент. Значит, если объёмы шаров относятся как 1 ∶ 64, их диаметры должны относится как 1 ∶ 4.

Поймём, как зависит объём сферы с тонкими стенками от их толщины ℎ и диаметра сферы 𝑑. Этот во- прос аналогичен вопросу про количество краски, которая требуется для того, чтобы покрыть тонким слоем поверхность. Интуитивно понятно, что количество краски пропорционально площади этой поверхности.

Чтобы получить эту зависимость строго, посчитаем объём как разность объёмов двух шаров, диаметры которых отличаются на 2ℎ

𝑉сферы = 𝛼 ⋅ (𝑑 + 2ℎ)3 − 𝛼 ⋅ 𝑑3 = 𝛼 (𝑑3 + 6𝑑2ℎ + 6𝑑ℎ2 + 8ℎ3 − 𝑑3) =

= 𝛼 ⋅ 6𝑑2ℎ ⋅ (1 + ℎ + 4 ℎ2 ) . (2)

𝑑 3 𝑑2

Заметим, что стенки тонкие, то есть отношение ℎ/𝑑 мало по сравнению с единицей. Поэтому можно пре- небречь всеми слагаемыми в скобках кроме первого. Получили, что объём сферы с тонкими стенками толщины ℎ равен

𝑉сферы = 6𝛼 ⋅ ℎ𝑑2. (3)

Это значит, что если для изготовления маленькой сферы потребовался 1 кг, то для большой потребуется

16 кг (их диаметры отличаются в 4 раза). Поэтому останется (64 − 16) кг = 48 кг материала.

**Ответ:** Останется 48 кг материала.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
| 1 | Сформулировано, что объём шара пропорционален кубу диаметра (без доказательства)   * Если использована явная формула для объёма шара с неверным   коэффициентом. | 4  2 |
| 2 | Сформулировано, что объём сферы пропорционален её площади (без доказательства)   * Если использована явная формула для объёма шара с неверным   коэффициентом. | 4  2 |
| 3 | Ответ | 2 |
|  | **Сумма** | 10 |

## Задача 2. Из пустого в порожнее

Проследим мысленно за жидкостью из первого ведра отдельно. В начале её температура была 4 ∘C, а после переливания и нагрева стала равна 20 ∘C. Если теплоёмкость жидкости 𝑐, а плотность 𝜌, на это по- требовалась теплота

𝑄1 = 𝑐𝜌 ⋅ 1 л ⋅ (20 ∘C − 4 ∘C) = 𝑐𝜌 ⋅ 16 ∘C ⋅ л. (4) Для нагрева жидкости из второго ведра необходима теплота

𝑄2 = 𝑐𝜌 ⋅ 2 л ⋅ (20 ∘C − 8 ∘C) = 𝑐𝜌 ⋅ 16 ∘C ⋅ л, (5)

а для жидкости из третьего

𝑄3 = 𝑐𝜌 ⋅ 4 л ⋅ (20 ∘C − 16 ∘C) = 𝑐𝜌 ⋅ 16 ∘C ⋅ л. (6)

Видно, что 𝑄1 = 𝑄2 = 𝑄3, поэтому всего потребуется теплоты

𝑄∑ = 𝑄1 + 𝑄2 + 𝑄3 = 3𝑄3. (7)

Из условия известно, что 𝑄3 = 70 кДж.

**Ответ:** На нагрев жидкости в третьем ведре потребуется 𝑄∑ = 3𝑄3 = 210 кДж.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
| 1 | Замечено, что можно считать нагрев жидкостей из разных вёдер  «независимо» | 2 |
| 2 | Три различных уравнения теплового баланса (по два балла за каждое) или любое другое верное обоснование того, что для нагрева воды во всех сосудах требуется одно и то же количество теплоты | 6 |
| 3 | Ответ | 2 |
|  | **Сумма** | 10 |

*Примечание:* если решение строится на последовательной записи уравнений теплового баланса для переливаний и нагрева, то следует использовать следующую разбалловку

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
| 1 | За систему уравнений теплового баланса (**2 балла** за уравнение, но в сумме не более **6** баллов) | 6 |
| 2 | Ответ | 4 |
|  | **Сумма** | 10 |

## Задача 3. Необычный день

Пускай длина одного участка дороги 𝑃, а обычная скорость мистера Смита 𝑣. Тогда до неудачного дня, на дорогу от дома до работы уходило время

𝑇обычно

= 3𝑃 . (8)

𝑣

Посмотрим, куда мистер Смит мог повернуть утром. Заметим, что у него есть только два варианта оши- биться. В одном из них он проехал с увеличенной скоростью 𝑛𝑣 расстояние 3𝑃, а в другом 5𝑃. То есть время, поездки на работу могло быть

Дом Дом

Работа

Работа

𝑇I

2𝑃 3𝑃

= +

(9)

𝑇II

2𝑃 5𝑃

= +

(10)

утро

𝑣 𝑛𝑣

утро

𝑣 𝑛𝑣

Вечером у мистера Смита тоже было два варианта Дом

Работа

Работа

Дом

I

𝑇

вечер

5𝑃

= 𝑣

(11)

II

вечер

𝑇

3𝑃

= 𝑣

(12)

Из условия известно, что на дорогу ушло больше времени, чем обычно, значит подходит только первый вариант

𝑇вечер =

5𝑃

𝑣 . (13)

Пока что складывается впечатление, что у задачи есть два решения. Найдём их, приравняв времена, кото- рые ушли на дорогу утром и вечером

2𝑃 3𝑃

5𝑃

3𝑃

3𝑃

𝑣 + 𝑛𝑣 =

𝑣 ⇒

𝑛𝑣 =

𝑣 ⇒ 𝑛 = 1. (14)

То есть скорость не увеличивалась. Этот вариант не подходит по условию задачи. Разберёмся с оставшимся

2𝑃 5𝑃

5𝑃

5𝑃

3𝑃 5

𝑣 + 𝑛𝑣 =

𝑣 ⇒

𝑛𝑣 =

𝑣 ⇒ 𝑛 = 3 . (15)

**Ответ:** мистер Смит увеличил скорость в 5/3 раз.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
| 1 | Указаны оба варианта траектории утром   * Если указан только один вариант траектории | 4  2 |
| 2 | Верно указана траектория вечером | 2 |
| 3 | Показано, что одна из траекторий не подходит | 2 |
| 4 | Ответ | 2 |
|  | **Сумма** | 10 |

## Задача 4. Жук на склоне

Первым делом заметим, что можно рассматривать только ситуации, когда жук находится на краю ли- нейки. Пусть жук не на краю линейки и система находится в равновесии. Тогда можно переклеить линейку и сместить жука в разные стороны таким образом, чтобы их центр масс остался на месте. При этом жук удалится от края стола, а система не выйдет из равновесия (центр масс не изменил своего положения).

Теперь посмотрим, что происходит, если жук находится на правом конце линейки. Так как по условию

𝑙 > 𝐿/2, и сила тяжести линейки, и сила тяжести жука «закручивают» систему по часовой стрелке. Причём эти силы ничем не уравновешены, и система начнёт вращаться относительно точки 𝑂1.

𝐿



𝑙

𝑚л𝑔

𝑀𝑔

𝑚ж𝑔

𝑂1

𝑙 − 𝐿/2

Разберёмся со случаем, когда жук сидит на левом краю линейки. Тогда при нарушении равновесия вращение начнётся относительно угла кубика (𝑂2)

𝐿

𝑙 − 𝑎/2



𝑚ж𝑔

𝑀𝑔

𝑚л𝑔

𝑙 − 𝐿/2 − 𝑎/2

𝑎/2

𝑂2

Запишем правило рычага относительно точки 𝑂2 для случая, когда жук находится над столом

𝑀 ⋅ 𝑎 = 𝑚

⋅ (𝑙 − 𝑎 ) + 𝑚 ⋅ (𝑙 − 𝐿 − 𝑎 ) , (16)

2 ж

Отсюда можно выразить массу жука

2 л 2 2

𝑚ж

= 1

2𝑙 − 𝑎

(𝑀 ⋅ 𝑎 − 𝑚л

⋅ (2𝑙 − 𝐿 − 𝑎)) =

= 1

35 см

(22 г ⋅ 5 см − 15 г ⋅ (40 см − 30 см − 5 см)) = 120 − 85 г = 1 г (17)

35

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
| 1 | Указано, что жук не может сидеть справа от стола | 2 |
| 2 | Указано, что в случае, когда жук сидит на левом краю вращение будет происходить относительно точки 𝑂2 | 2 |
| 3 | Правило рычага для случая, когда жук сидит на левом краю | 4 |
| 4 | Ответ | 2 |
|  | **Сумма** | 10 |

## Задача 5. Ответственный мальчик

Нас интересует минимальное время, за которое мальчик может перевезти весь мусор. Время будет ми- нимально, когда отношение 𝑚 , то есть «скорость» вывоза мусора, должно быть максимальным. На графике это соответствует самой пологой прямой, которая выходит из нуля и имеет общую точку с графиком.

𝑡, мин

𝑚, кг

𝑡

120

90

60

30

20 40 60 80 100

Из графика видно, что оптимальное отношение

𝑡 ≈ 80 мин

(18)

𝑚 82 кг

поэтому на то, чтобы перевезти весь мусор потребуется время

𝑇 = 2000 кг мин ≈ 32,5 ч (19)

кг

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
| 1 | Получена связь суммарного времени, которое требуется на вывоз мусора, с временем, которое уходит на один рейс | 1 |
| 2 | Указано, что следует проводить самую пологую прямую, проходящую через ноль и имеющую с графиком общую точку. (Если проводится касательная не через 0, ставится **0 баллов**) | 6 |
| 3 | Ответ   * если ответ попадает в промежуток от 31 часа до 34 часов * если ответ попадает в промежуток от 29,5 часов до 35,5 часов * если ответ попадает в промежуток от 28 часов до 37 часов | 3  3  2  1 |
|  | **Сумма** | 10 |